

Sebastian Fricke

Andrea Peter-Koop

Manuela Kern

Universität Bielefeld

Florian Böllhoff

Hubert von Schnakenburg

Rotary Distrikt 1900

Mathekiste

Eine Einführung



Materialübersicht

11 Zahlenkarten mit den Zahlen von 0-10



15 Holzwürfel

- Je 2 Würfel mit 1, 2, 3 und 4 Löchern
- 7 Würfel mit 5 Löchern

60 Griffkorken



15 Zahlenreiter

- Je 2 Reiter mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4
- 7 Reiter mit der Zahl 5



Inhaltsverzeichnis

Materialübersicht.....	2
Inhaltsverzeichnis	3
1. Einführung	4
2. Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste für Kinder unter drei Jahren	6
3. Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste für Kinder ab drei Jahren	7
3.1. Geometrische Konstruktionen	7
3.2. Anordnung der Zahlsymbole	7
3.3. Mengen-Zahl-Zuordnungen und Zahlzerlegungen	8
3.4. Diverse Spiele	9
4. Theoretischer Hintergrund	10
Entwicklung von Zahlbegriff und Zählkompetenzen	10
Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung	10
Die Entwicklung von Zählkompetenz	11
Ein aktuelles Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen	13
Literaturverzeichnis.....	15
Glossar.....	16

1. Einführung

Zahlreiche Forschungsergebnisse und Impulse aus der Praxis haben in den letzten Jahren verstärkt dazu beigetragen, dass die frühe Bildung gesellschaftlich an Bedeutung gewonnen hat. Vor allem im Bereich der sprachlichen Frühförderung sowie für die naturwissenschaftliche Bildung junger Kinder gibt es gegenwärtig zahlreiche Projekte und Initiativen. Auch Ansätze und Konzepte zur frühen mathematischen Bildung finden zunehmend Eingang in die Praxis der Kindertagesstätten. Das steht sicher in engem Zusammenhang mit Forschungsarbeiten, die darauf verweisen, dass die vorschulische Entwicklung von sog. Vorläuferfähigkeiten für das schulische Mathematiklernen eine entscheidende Voraussetzung für späteren Schulerfolg ist. Diesbezüglich hat sich vor allem gezeigt, dass fachspezifisches Vorwissen offenbar bedeutsamer ist als allgemeine kognitive Faktoren wie Intelligenz.

So wichtig eine frühe Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten bereits in der Kindertagesstätte ist, so wichtig ist es zu berücksichtigen, dass die methodischen Zugänge angemessen sind. Förderhefte, die ein schulisches Lernen simulieren sollen, sind in diesem Zusammenhang nachweislich wenig sinnvoll und wirken sich bei vielen mathematisch interessierten Kindern wohl eher negativ auf die Motivation zur Befassung mit mathematischen Fragen und Inhalten aus. Ein wirksames und kindgerechtes vorschulisches Mathematiklernen ist spielerisch angelegt und setzt an alltagsbezogenen Kontexten an.

Die Verbindung von Mathematiklernen mit spielerischem Erkunden greift auch die Mathekiste auf. Nach einer Erprobungsphase in elf Kindertagesstätten und einer Grundschule in Bielefeld in Kooperation mit der Universität wird sie interessierten Einrichtungen in der Region flächendeckend kostenfrei zur Verfügung gestellt.

Die diesbezüglichen Erfahrungen und mathematischen Entdeckungsmöglichkeiten mit der Mathekiste werden in diesem Begleitheft zusammenfassend dargestellt.

Interessierte Frühpädagoginnen und -pädagogen finden in dieser Handreichung Beispiele für zahlreiche Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste mit Bezug zu vielfältigen mathematischen Inhalten. Konkret werden Ideen für den Einsatz bei Kindern verschiedener Altersgruppen entwickelt. Es werden Impulse für mathematische Entdeckungen schon sehr junger Kinder sowie für Kinder ab drei Jahren und besonders Vorschulkinder und Schulanfängerinnen und Schulanfänger gegeben.

Methodisch kann die Mathekiste sehr vielseitig eingesetzt werden. Es ist möglich, sie in das Spiel einer Kleingruppe zu integrieren, offene Angebote zu gestalten oder auch in Rituale mit der gesamten Gruppe (z. B. im Morgenkreis) einzubinden.

Die Handlungen der Kinder sollten dabei allerdings immer angemessen sprachlich begleitet werden. Dies bietet die Möglichkeit, Lernfortschritte oder Probleme zu beobachten, Denkvorgänge zu würdigen und zur Selbstüberprüfung anzuregen.

Die thematische Ordnung kann dabei einen möglichen Ablauf des Einsatzes mit der Kiste aufzeigen, ist aber nicht als programmatischer Ablauf zu verstehen. Es ist auch möglich, die Kinder eigenständig den Inhalt der Kiste erforschen zu lassen. Die Erfahrungen haben hier gezeigt, dass sie das Material originär zum Bauen anregt. In dieser Phase des Spielens sind allerdings auch sehr interessante Spielideen entstanden.

Die Entwicklung dieser Handreichung wäre ohne das Engagement der am Projekt beteiligten Erzieherinnen und Erzieher nicht möglich gewesen.

Ihnen sei ebenso herzlich gedankt wie den Eltern, die der Veröffentlichung der Fotos ihrer Kinder in diesem Band zugestimmt haben.

Los geht's!

2. Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste für Kinder unter drei Jahren

Bereits Kinder unter drei Jahren können vom Einsatz der Materialien profitieren. Sie trainieren nicht nur ihre Motorik durch das Einsetzen der Griffkorken in die Löcher der Würfel, sondern können auch erste Erfahrungen im Bezug auf die Eins-zu-eins-Zuordnung sammeln. Dies ist für das spätere Zählen wichtig, da dabei jedem Objekt der Menge genau ein Zahlwort zugeordnet wird.



Hier wird das Material der Mathekiste um zusätzliche Karten ergänzt. Die Zahlsymbole werden dabei mit verschiedenen Mengendarstellungen verbunden (Würfelbild, zählbare Punkte). Ferner sind die jeweiligen Zahlen auf dem Zahlenstrahl verortet und um ein Bild der entsprechenden Finger ergänzt. Im Bild links werden die erstellten Karten hier für die Versprachlichung der Materialhandlungen benutzt: „Das ist die Drei und das sind drei Finger.“

Sie bieten den Kindern ebenfalls die Möglichkeit der Selbstkontrolle.

3. Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste für Kinder ab drei Jahren

3.1. Geometrische Konstruktionen



Wie bereits in der Einleitung beschrieben, benutzen die Kinder die Würfel im freien Spiel zunächst häufig für geometrische Konstruktionen. Dabei können zum Beispiel die Raum-Lage-Bezeichnungen durch Beschreibungen der Bauwerke geübt werden.

Im gemeinsamen Spiel werden aber auch soziale Kompetenzen gefördert, wenn die Kinder zusammen einen Turm bauen. Dabei kann es passieren, dass man selbst eine tragende Rolle übernimmt.

Die Würfel können auch als Messwerkzeug bzw. Einheit (hier als Maßeinheit für eine Fläche) verwendet werden.

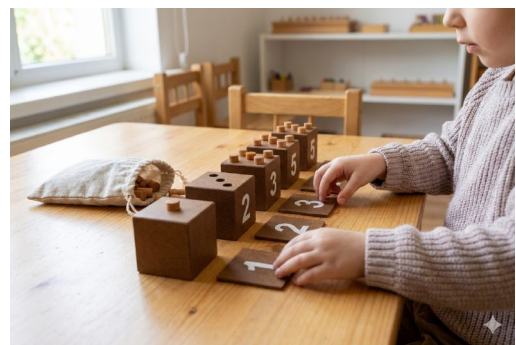
„Für eine Teppichfliese brauchen wir vier Würfel.“

3.2. Anordnung der Zahlsymbole

Für die Thematisierung der Zahlwörter und Zahlsymbole werden bei diesem Spiel die Zahlenkarten gemischt und von den Kindern jeweils verdeckt gezogen.

Dabei wird in der ersten Phase des Spiels die Zahl, die gezogen wird, vorgelesen und vor sich hingelegt.

In der zweiten Phase des Spiels werden die Zahlenkarten in der entsprechenden Reihenfolge (Seriation) untereinander gelegt. Um die Bedeutung der Symbole zu lernen, nennen die Kinder die Zahl, die sie legen, erneut. Fehler werden gegenseitig korrigiert.



In diesem Kontext können Zahlzerlegungen, durch das Zuordnen der Zahlenreiter, ebenfalls thematisiert werden.

Anstelle der Zahlenkarten wird hier der Zahlenweg (Merlin GmbH) aus Kunststoff verwendet. Alternativ können auch selbst Teppichfliesen mit Zahlen versehen werden.

Anknüpfend an die Anordnung der Zahlsymbole können auch Zahl-Mengen-Zuordnungen vorgenommen werden (weitere Ideen zu diesem Thema finden sich ab Abschnitt 3.3).

Der so entstandene Aufbau wird hier genutzt, um die Mengenbewusstheit von Zahlen im Sinne des präzisen Anzahlkonzeptes (vgl. das Entwicklungsmodell in Kap. 4) zu fördern: "Zehn ist mehr als einer."

3.3. Mengen-Zahl-Zuordnungen und Zahlzerlegungen



Zahlzerlegungen und Mengen-Zahl-Zuordnungen lassen sich mit dem Material ebenfalls thematisieren und darstellen.

In diesem Beispiel haben die Kinder die Zahlenkarten erneut verdeckt gezogen und das entsprechende Zahlwort genannt.

Die Kinder haben dann zu ihrer gezogenen Zahl den bzw. die passenden Würfel gesucht. Kontrolliert wurde die Auswahl durch Einsetzen der Griffkorken.

Zum Schluss werden die Zahlen wieder entsprechend der Reihenfolge geordnet.

Entstehen hierbei Zahlzerlegungen, die für das spätere Legen der ganzen Reihe problematisch werden, sollte dies zusammen mit den Kindern thematisiert werden.

So wird spielerisch ein Bewusstsein für Zahlzerlegungen geschaffen, das später die Voraussetzung für die geeignete Zerlegung der Zahlen beim Rechnen ist:

$$5 + 8 = 5 + 5 + 3 \quad 6 + 8 = 6 + 4 + 4$$

Zudem wird die Problemlösefähigkeit geschult.

Der vollständig gelegten Reihe (vgl. Abschnitt 3.4) können dann die Zahlenkarten und Zahlenreiter zugeordnet werden.

Die Fotos bilden dabei den Prozess ab.

Die fertige Reihe bietet auch Anlass, um das Rückwärtszählen zu üben.

„Dann zeigt doch alle einmal 10 Finger.“

Dabei sollen durchaus auch Zahlen thematisiert werden, die nicht in entsprechender Anzahl am Körper zu finden sind.

Die Antworten der Kinder können dabei sehr interessant ausfallen...

Eine weitere Möglichkeit, das Mengen-Zahl-Verständnis zu trainieren, ist die Thematisierung der gefundenen Zahlen am eigenen Körper.

Ein möglicher Dialog mit den Kindern könnte wie folgt aussehen:

„Wie viele Löcher haben denn diese beiden Würfel?“

„10 Löcher.“

„Was haben wir denn 10 mal an unserem Körper?“

„Wir haben 10 Finger.“

„Wir haben 10 Zehen.“

3.4. Diverse Spiele

Das Material kann ebenfalls genutzt werden, um größere Mengen von diversen Objekten (hier „Legoreifen“) zu strukturieren, um das spätere Zählen zu erleichtern.

Die ermittelte Zahl haben die Kinder dann mit den Zahlenkarten gelegt.

Sportliche Aktivitäten (hier Liegestütze) können ebenfalls mit der Mathekiste kombiniert werden.



Dieser Junge lässt seine Liegestütze von seinem Freund durch Einsetzen der Griffkorken zählen.

Danach legen die beiden Jungen die Zahl mit den Nummernkarten.

Auf diese Weise lassen sich auch sportliche Leistungen miteinander vergleichen.

Hier wurden in Ergänzung zu den Würfeln die Spielkarten des Spiels „Erzähl mir was 1“ (Finken) verwendet. Die Spielkarten sind mit unterschiedlichen Aktivitäten bebildert und werden unter die 1-5 Würfel verteilt. Die Kinder wählen dann nacheinander jeweils einen Würfel aus und führen die Aktivität entsprechend der Anzahl der Löcher des Würfels durch.

Falls das oben genannte Spiel nicht zur Verfügung steht, ist es auch möglich, eigene Karten anzufertigen. Als Aktionen hierfür bieten sich Klatschen, Hüpfen, Piepsen, Schnipsen oder Stampfen an.

Mit einer abgeänderten Form des Memory-Spiels können Vorgänger und Nachfolger der Zahlen von Null bis Zehn geübt werden. Hierzu werden die Nummernkarten verdeckt gemischt und paarweise aufgedeckt.

Wurden zwei aufeinanderfolgende Zahlen aufgedeckt, so darf das Paar behalten werden? Da eine begrenzte Anzahl an Karten vorliegt und die Wahrscheinlichkeit, ein passendes Pärchen aufzudecken, hoch ist, sollte jedes Kind nur ein Pärchen umdrehen.

4. Theoretischer Hintergrund

Entwicklung von Zahlbegriff und Zählkompetenzen

Bevor im Folgenden konkrete Einsatzmöglichkeiten der Mathekiste aufgezeigt werden, sollen zentrale Begriffe geklärt werden, die im Zusammenhang mit vorschulischem Mathematiklernen von Bedeutung sind. Da Kinder bereits bei der Einschulung eine Vielzahl mathematischer Fähigkeiten und Kenntnisse besitzen, soll der Begriff der mathematischen Vorläuferfähigkeiten bzw. Basisfertigkeiten geklärt werden.

Hervorzuheben ist, dass im wissenschaftlichen Verständnis vorschulische Lernprozesse nicht vom Lernen in der Schule getrennt gesehen werden, sondern dass sie vielmehr eine wichtige Grundlage für das schulische Mathematiklernen sind. Als Basisfertigkeiten oder Vorläuferfähigkeiten werden die Fähigkeiten bezeichnet, „die von den meisten Kindern bereits vor Schulanfang erworben werden und denen eine große Bedeutung für das schulische Mathematiklernen beigemessen wird“ (Peter-Koop & Grüßing 2011, S. 6). Die Bereiche Mengen, Zahlen und Zählen sind die bisher am intensivsten erforschten Bereiche in diesem Kontext. Bedeutend scheinen aber auch Einsichten in den Bereichen Muster und Strukturen, geometrische Kompetenzen und Größenverständnis.

Da die Mathekiste originär auf die Entwicklung von Zahlbegriff, Zählkompetenzen und die Anbahnung von Operationsverständnis ausgelegt ist, soll im Folgenden der entsprechende theoretische Hintergrund aufgezeigt werden.

Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung

Jean Piaget, der als Begründer der modernen Entwicklungspsychologie gilt, ging davon aus, dass jeder Mensch bei seiner intellektuellen Entwicklung vier Hauptstufen durchläuft, die aufeinander aufbauen. Die Zahlbegriffsentwicklung findet nach Piaget in der sog. präoperationalen Phase (ungefähr im Alter zwischen zwei und sechs Jahren) statt und ist mit Beginn der konkreten-operationalen Phase (ungefähr von 7 bis 11 Jahren) abgeschlossen. Für ihn ist das kindliche Gehirn bei der Geburt ein unbeschriebenes Blatt, das nichts von der Außenwelt weiß (Dehaene 1999, S. 54). Er nimmt an, dass der Aufbau des Zahlbegriffes im Zusammenhang mit logischen Operationen stattfindet. Zentral sind dabei aus seiner Sicht pränumerische Fähigkeiten wie das Vergleichen, das Klassifizieren, die Eins-zu-eins-Zuordnung, die Einsicht in die Mengeninvarianz und die Seriation (vgl. Piaget & Szeminska 1972, S. 10ff). Zählübungen haben hingegen nach seinem Verständnis keine förderlichen Auswirkungen auf die Zahlbegriffsentwicklung: „Man darf nämlich nicht glauben, ein Kind besitze die Zahl schon nur deshalb, weil es verbal zählen gelernt hat“ (Piaget & Inhelder 1975, S. 106). Einige seiner Anhänger gingen so weit, dass sie vorschulische Zählübungen sogar als schädlich für die kindliche Zahlbegriffsentwicklung ansahen.

Diese Annahme wurde seit den 1980er Jahren in zahlreichen Forschungsarbeiten eindeutig widerlegt. So zeigte sich u.a., dass Zählübungen nicht etwa schädlich sind, sondern sogar einen positiven Einfluss auf die Zahlbegriffsentwicklung haben und sich positiv auf den Aufbau logischer Operationen im Piagetschen Sinne auswirken. Auch Ergebnisse der modernen Säuglingsforschung stehen im Widerspruch zu Piagets Theorie. So konnte in den 1990er Jahren gezeigt werden, dass das menschliche Gehirn mit einem angeborenen Mechanismus für das Erfassen numerischer Größen ausgestattet ist und dass Säuglinge bereits Fähigkeiten in Bezug auf Mengenunterscheidung, das Erkennen von Mengenveränderungen und das Schätzen von Mengen zeigen (vgl. Dehaene 1999, S. 64f).

Entsprechend schließen aktuelle Modelle der Zahlbegriffsentwicklung ausdrücklich frühe Zählfertigkeiten ein. Unter der Annahme, dass junge Kinder bereits über Einsichten und Fertigkeiten in Bezug auf Zahlen verfügen, basiert die Entwicklung des Zahlbegriffes auf der Integration verschiedener Begriffe, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Besonders die Integration von zahlenbezogenen Kompetenzen wie Zählen, Simultanerfassung (engl. Subitizing) und Vergleichen wird in der entsprechenden Fachliteratur hervorgehoben.

Die Entwicklung von Zählkompetenz

Von großer Bedeutung für die in sich äußerst komplexe Entwicklung der Zählkompetenz ist ein Zusammenspiel aus der Kenntnis der Zahlwortreihe, dem Abzählen im Sinne einer Eins-zu-eins-Zuordnung von Objekt und Zahlwort sowie dem Verständnis verschiedener Zahlaspekte. Bahnbrechende Arbeiten zur Entwicklung stammen aus der psychologischen Forschung der 1970er-80er Jahre in den USA. Gelman und Gallistel (1978) formulierten auf der Basis ihrer Forschungsergebnisse fünf verschiedene Zählprinzipien, die für den Zählprozess unabdingbar sind:

1. Das Eindeutigkeitsprinzip:
Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
2. Das Prinzip der stabilen Ordnung:
Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung.
3. Das Kardinalzahlprinzip:
Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte in einer Menge an.
4. Das Abstraktionsprinzip:
Es kann jede Menge ausgezählt werden, d.h. es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.

5. Das Prinzip von der Relevanz der Anordnung:

Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis nicht von Bedeutung.

Die ersten drei Prinzipien beziehen sich auf die Weise, wie gezählt wird. Die beiden letzten Zählprinzipien sind übergeordnete Strategien und beziehen sich auf das, was gezählt werden kann. Im Gegensatz zu German und Gallistel sieht Fuson (1988) eine starke Verzahnung zwischen der Zählentwicklung und dem Erwerb der Zahlwortreihe. Fuson unterscheidet dabei fünf aufeinanderfolgende Niveaus:

1. *Ganzheitsauffassung der Zahlwortreihe (string level)*

Die Zahlwortreihe wird als Ganzes aufgefasst. Die Zahlwörter („eins“-„zwei“-„drei“-„vier“) werden noch nicht unterschieden, sondern nur als Silben der ganzen Zahlwortreihe verstanden.

2. *Unflexible Zahlwortreihe (unbreakable chain level)*

Einzelne Zahlwörter können klar unterschieden werden, jedoch wird die Zahlwortreihe als unflexible Einheit empfunden, die immer mit der Startzahl „eins“ beginnen muss. Es gelingt erste eins-zu-eins-Zuordnungen von Zahlwort und Objekt.

3. *Teilweise flexible Zahlwortreihe (breakable chain level)*

Es kann von verschiedenen Startzahlen aus gezählt und der Vorgänger/Nachfolger einer Zahl genannt werden.

4. *Flexible Zahlwortreihe (numerable chain level)*

Es kann von jeder Zahl aus schrittweise weitergezählt werden.

5. *Vollständig reversible Zahlwortreihe (bidirectional chain level)*

Es ist möglich, von jeder beliebigen Zahl vorwärts und rückwärts zu zählen.

Im Vergleich beider Ansätze zum Erwerb des Zählens sprechen einige Befunde dafür, dass beim Aufbau der Zählkompetenz zunächst der sprachliche Erwerb der Zahlwortreihe im Vordergrund steht, aus der sich schließlich der Ordinalzahlbegriff entwickelt. Über Erfahrungen in Zählsituationen und Generalisierungsprozessen entwickeln Kinder auch eine Einsicht in die Zählprinzipien. Aus der Verknüpfung von Zählzahl und Mächtigkeit (Anzahl) der abgezählten Mengen entwickelt sich schließlich auch das kardinale Verständnis. Beiden Theorien ist gemeinsam, dass sie dem Zählen eine bedeutende Rolle im Rahmen des Zahlbegriffserwerbs beimessen und sich somit deutlich von Piagets Theorie abheben. Jedoch scheint gerade in der Verknüpfung von Zählsequenz und logischen Operationen mit Mengen, wie zum Beispiel bei der Mengeninvarianz oder bei der Zu- und Abnahme numerisch unbestimmter Mengen (Sind es mehr blaue oder mehr rote Perlen?), das Fundament kindlicher Zahlbegriffsentwicklung zu liegen.

Das folgende Modell beschreibt, wie sich die Verbindung von Zählfertigkeiten mit dem Verständnis für Mengen und Mengenoperationen sowie dem Erwerb früher Mengen-Zahlen-Kompetenzen verknüpft.

Ein aktuelles Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen

Basierend auf den Arbeiten von Resnick (1989) hat Krajewski (2008) ein Modell entwickelt, das den natürlichen Entwicklungsverlauf mathematischer Kompetenzen bis zum Schuleintritt veranschaulicht. Nach dem Modell vollzieht sich die Zahlbegriffsentwicklung von jungen Kindern über drei Ebenen.

Ebene I: Ausbildung numerischer Basisfertigkeiten

Die erste Ebene beschreibt numerische Basisfertigkeiten, die sich bereits bei Säuglingen finden. Babys sind von Geburt an in der Lage, Mengen anhand ihrer Ausdehnung zu unterscheiden. Dies bezieht sich allerdings noch nicht auf diskrete Zahlen, sondern ist kontinuierlich. Unabhängig von dieser Mengenunterscheidung beginnen Kinder ab einem Alter von zwei bis drei Jahren zu zählen. Im Laufe der Zeit entwickelt sich dabei die exakte Reihenfolge der Zahlen. In dieser ersten Phase werden die Zahlwörter allerdings i.W. wie die Buchstaben des Alphabets aufgesagt. Eine Verknüpfung mit Mengen findet noch nicht statt. Die Zahlwörter werden dabei mit Dingen verknüpft, nicht aber mit der Menge, die bereits gezählt wurde. Hier ist Piagets Feststellung einzureihen, verbales Zählen reflektiere noch nicht den kindlichen Besitz der Zahl (Krajewski, Grüßing & Peter-Koop 2009, S. 24).

Ebene II: Erwerb einer „Mengenbewusstheit von Zahlen“

Im Kindergartenalter werden diese beiden Aspekte verbunden und es entsteht ein Anzahlkonzept. In dieser zweiten Ebene können Zahlen auch für Anzahlen stehen. Die Entwicklung vollzieht sich dabei in zwei Stufen. Auf der ersten Stufe (vgl. Abb. 1, Ebene IIa) findet laut Krajewski eine grobe Einteilung statt. Den einzelnen Mengenkategorien (wenig, viel, sehr viel) werden mehrere Zahlen zugeordnet (z.B. sind „3“ wenig, „1“ allerdings auch), daher ist es den Kindern nicht möglich, innerhalb der Kategorien zu unterscheiden. So sind sie noch nicht in der Lage, bei benachbarten Zahlen die größere der beiden zu identifizieren.

Im Laufe der Zeit verfeinert sich dieses „unpräzise Anzahlkonzept“ zum „präzisen Anzahlkonzept“ und ermöglicht es den Kindern, innerhalb der Mengenkategorien zu unterscheiden. Erst jetzt können diskrete (d.h. abzählbare) Mengen durch exakte Zuordnung der Zahlwörter bestimmt und auch verglichen werden. Im Laufe dieser Entwicklung erkennen Kinder auch, dass sich Mengen nur verändern, wenn etwas hinzugefügt oder weggenommen wird (Mengeninvarianz). Ferner erkennen Kinder im Rahmen des präzisen Anzahlkonzeptes auch, dass sich Mengen in Teilmengen zerlegen lassen.

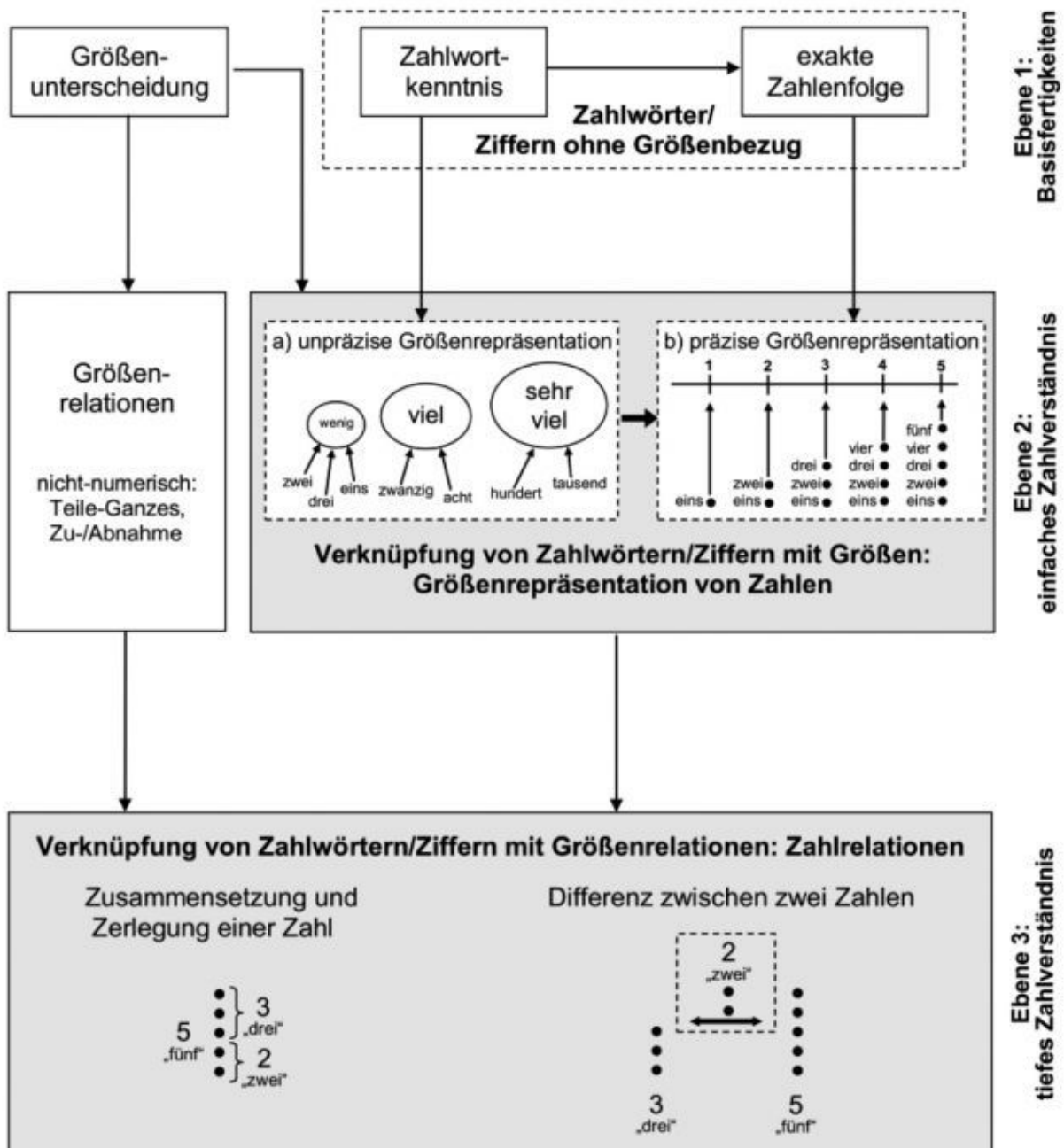


Abbildung 1: Modell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski (Krajewski & Ennemoser, 2013, S. 43)

Ebene III: Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen

In der dritten Entwicklungsstufe baut sich ein Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen auf, d.h. die Kinder verstehen Teil-Ganzes-Beziehungen (von fünf Bällen sind drei grün und zwei rot), weil sie nun die Mengenrelationen mit dem Anzahlkonzept verbinden. So verstehen sie auch, dass sich der Unterschied zwischen zwei Zahlen wieder durch eine Zahl ausdrücken lässt. Dies ermöglicht es ihnen, einfache Rechenoperationen durchzuführen. Damit spiegeln diese ersten Rechenfertigkeiten den Beginn des arithmetischen Verständnisses wieder, während nach Krajewski (2008) die ersten beiden Ebenen als mathematische Vorläuferkompetenzen bezeichnet werden können.

Literaturverzeichnis

Dehaene, S. (1999): *Der Zahlensinn*. Berlin: Birkhäuser.

Fuson, K. C. (1988): *Children's concepts of number*. New York: Springer.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978): *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Krajewski, K., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2009): Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Beginn der Grundschulzeit. In: Heinze, A. / Grüßing, M. (Hrsg.) (2009): *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. Münster: Waxmann, S. 17 - 34.

Krajewski, K. (2008): Frühe Förderung von mathematischen Kompetenzen im Vorschulalter. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft: ZfE / Sonderheft, S. 91 - 103.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2011): *Elementarmathematisches Basisinterview für den Einsatz im Kindergarten*. Offenburg: Mildenerger.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975): *Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1972): *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Preiß, G. (o.J.): *Zahlenweg Set 1 - 20*. Forchtenberg: Merlin.

Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: *American Psychologist* 44, S. 162 - 169.

Rucys, D. (o.J.): *Erzähl mir was!* 1. Oberursel: Finken.

Glossar

<i>Klassifizieren</i>	Das Zusammenfassen oder Unterscheiden von Objekten nach Übereinstimmungen bzw. Unterschieden, d. h. die Zusammenfassung von Objekten zu Klassen oder Unterklassen.
<i>Vergleichen</i>	Das Vergleichen von Objekten nach quantitativen (z. B. Anzahl) und qualitativen (z. B. Farbe) Merkmalen; wichtig ist hierzu das Ausbilden von Begriffen, die mathematische Ordnungsrelationen beschreiben (z. B. mehr, höher, die meisten etc.).
<i>Seriation</i>	Die Anordnung von Objekten nach bestimmten Kriterien, z. B. von lang nach kurz, vom größten zum kleinsten Element etc.
<i>Mengeninvarianz</i>	Die Mächtigkeit einer Menge als invariant von Art und Lage der Elemente erkennen.
<i>Eins-zu-eins-Zuordnung</i>	Mengen in Bezug auf ihre Mächtigkeit (d. h. die Anzahl ihrer Elemente) vergleichen, z. B. jedem Teller eine Gabel zuordnen bzw. zu überprüfen, ob zu jedem Teller eine Gabel vorhanden ist.
<i>Teil-Ganzes-Beziehungen</i>	Der Vergleich einer Teilmenge mit der Gesamtmenge, z. B. lässt sich eine Menge aus 5 Elementen aus Teilmengen mit 3 und 2 Elementen zusammensetzen.
<i>Simultanerfassung (engl. Subitizing)</i>	Das Erfassen der Anzahl der Elemente einer Menge auf einen Blick als Ganzes ohne erkennbares Abzählen. In der Regel gelingt das bei (unstrukturierten) Mengen mit bis zu vier oder fünf Elementen.
<i>Kardinalzahl</i>	Kennzeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge: eins, zwei, ... Beim Abzählen gibt die letztgenannte Zählzahl die Anzahl der Elemente der Menge an („Kardinalzahlprinzip“).
<i>Ordinalzahl</i>	Kennzeichnet den Rangplatz in einer geordneten Serie oder Reihe: erster, zweiter, ..., auch Ordnungszahl genannt. In der Folge der natürlichen Zahlen bezeichnet man sie als Zählzahlen.